

УДК 535.14

ВЛИЯНИЕ ТЕПЛОВЫХ ВОЗБУЖДЕНИЙ РЕЗЕРВУАРА
НА ФАЗОВУЮ БИСТАБИЛЬНОСТЬ
В ФУНДАМЕНТАЛЬНОЙ МОДЕЛИ КВАНТОВОЙ ОПТИКИ

© 2011 г. Т. Б. Карлович

Институт физики имени Б.И. Степанова НАН Беларуси 220072, Минск, Беларусь
E-mail: tbkar@mail.ru

Поступила в редакцию 18.04.2011 г.

Изучено влияние конечной температуры резервуара на фазовую бистабильность в фундаментальной модели квантовой оптики на основе численно рассчитанной Q -функции распределения и на основе аналитически полученной в случае больших частот Раби P -функции распределения. Получено условие для появления фазовой бистабильности в системе с учетом тепловых возбуждений резервуара.

В современных экспериментах с одноатомными системами, которые позволяют исследовать квантовые свойства излучения, в основном используются два типа резонаторов: оптические и микроволновые, различающиеся по длинам волн, конфигурации и структуре собственных мод. Кроме того, оптические и микроволновые резонаторы по-разному реагируют на температуру резервуара, в который они помещены. В оптическом диапазоне длин волн влиянием конечной температуры резервуара можно пренебречь, в то время как в микроволновом диапазоне необходимо учитывать влияние среднего числа тепловых фотонов и среднего числа возбуждений атомного резервуара [1].

Конечная температура резервуара в экспериментах с использованием микрорезонаторов оказывает влияние на коллапс и оживление осцилляций Раби для инверсной населенности атома [2], субпуассоновскую статистику в микролазере [3], на создание фоковских состояний в микролазере при помощи состояний ловушки [4], амплитудную бистабильность в микрорезонаторе [5], перепутывания атомов, последовательно проходящих через резонатор [6], суперчувствительную оптическую интерферометрию на основе частично перепутанных фоковских состояниях [7] и другие эффекты.

В данной работе рассмотрим влияние конечной температуры резервуара, а именно тепловых возбуждений атомного резервуара на фундаментальную модель квантовой оптики, в частности, на фазовую оптическую бистабильность [8]. Влияние тепловых фотонов на фундаментальную модель квантовой оптики уже исследовалось в работе [9]. Анализ будет проводиться двумя методами. Первый метод основан на восстановлении Q -функции распределения внутрирезонаторной ам-

плитуды поля с использованием численного решения для матричных элементов матрицы плотности в фоковском базисе. Второй метод основан на аналитическом решении для P -функции распределения в случае больших частот Раби.

Соответствующее уравнение для матрицы плотности фундаментальной модели квантовой оптики в представлении взаимодействия для случая точного резонанса между полем и двухуровневым атомом при ненулевой температуре имеет вид

$$\partial\rho/\partial t = E[a^+ - a, \rho] - ig[a^+ \sigma_- + a \sigma_+, \rho] + L_f \rho + L_a \rho, \quad (1)$$

где лиувиллиан L_f описывает затухание и возбуждение внутрирезонаторной моды поля под действием тепловых фотонов со средним числом тепловых фотонов в моде n_{th} :

$$L_f = k(n_{th} + 1)([a\rho, a^+] + [a, \rho a^+]) + kn_{th}([a^+ \rho, a] + [a^+, \rho a]), \quad (2)$$

а лиувиллиан L_a описывает распад и некогерентную накачку атома под действием тепловых возбуждений резервуара со средним числом тепловых возбуждений N_{th} :

$$L_a = \frac{\gamma}{2}(N_{th} + 1)([\sigma_-, \rho \sigma_+] + [\sigma_-, \rho, \sigma_+]) + \frac{\gamma}{2}N_{th}([\sigma_+, \rho \sigma_-] + [\sigma_+, \rho, \sigma_-]). \quad (3)$$

Здесь бозе-операторы a^+ и a описывают рождение и уничтожение фотонов в резонаторной моде поля и подчиняются коммутационным соотношениям

$$[a, a^+] = 1, \quad (4)$$

а ферми-операторы σ_- , σ_+ и σ_z описывают переходы между атомными состояниями и инверсную населенность двухуровневого атома и удовлетворяют коммутационным соотношениям:

$$[\sigma_+, \sigma_-] = \sigma_z, \quad [\sigma_{\pm}, \sigma_z] = \mp \sigma_{\pm}. \quad (5)$$

В формулах (1), (3) константа E есть интенсивность когерентной накачки, g – константа атомно-полевого взаимодействия, k – константа, описывающая скорость затухания резонаторной моды поля, γ – константа спонтанного распада атома в свободном пространстве.

Для первого метода решения уравнения (1) нами используется разложение матрицы плотности по элементам фоковского базиса $|m\rangle\langle m'|$, где m – число фотонов в моде поля для полевых переменных, и разложение по элементам двухуровневого атомного базиса $|l\rangle\langle l'|$, где $l = 1$ соответствует основному атомному состоянию, а $l = 2$ – возбужденному атомному состоянию:

$$\rho = \sum_{m,m'=0}^{\infty} \sum_{l,l'=1}^2 \rho_{l,l'}^{m,m'} |m\rangle\langle m'| |l\rangle\langle l'|. \quad (6)$$

Действие полевых операторов на полевые базисные состояния определяется формулами

$$a|m\rangle = \sqrt{m}|m-1\rangle, \quad a^+a|m\rangle = m|m\rangle, \quad (7)$$

а действие атомных операторов на базисные состояния атома определяется соотношениями

$$\begin{aligned} \sigma_-|2\rangle &= |1\rangle, & \sigma_+|1\rangle &= |2\rangle, \\ \sigma_z|1\rangle &= -|1\rangle, & \sigma_z|2\rangle &= |2\rangle. \end{aligned} \quad (8)$$

Согласно уравнению (1), система уравнений для матричных элементов $\rho_{l,l'}^{m,m'}$ имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_{11}^{m,mm'} &= E(\sqrt{m}\rho_{11}^{m-1,m'} - \sqrt{m+1}\rho_{11}^{m+1,m'} - \\ &\quad - \sqrt{m'+1}\rho_{11}^{m,m'+1} + \sqrt{m'}\rho_{11}^{m,m'-1}) + \\ &\quad + k(n_{th} + 1)(2\sqrt{m+1}\sqrt{m'+1}\rho_{11}^{m+1,m'+1} - (m+m')\rho_{11}^{mm'}) + \\ &\quad + kn_{th}(2\sqrt{m}\sqrt{m'}\rho_{11}^{m-1,m'-1} - (m+m'+2)\rho_{11}^{m,m'}) + \\ &\quad + \gamma(N_{th} + 1)\rho_{22}^{m,m'} - \gamma N_{th}\rho_{11}^{m,m'} - ig(\sqrt{m}\rho_{21}^{m-1,m'} - \sqrt{m'}\rho_{12}^{m,m'-1}), \\ \dot{\rho}_{22}^{m,m'} &= E(\sqrt{m}\rho_{22}^{m-1,m'} - \sqrt{m+1}\rho_{22}^{m+1,m'} - \\ &\quad - \sqrt{m'+1}\rho_{22}^{m,m'+1} + \sqrt{m'}\rho_{22}^{m,m'-1}) + \\ &\quad + k(n_{th} + 1)(2\sqrt{m+1}\sqrt{m'+1}\rho_{22}^{m+1,m'+1} - (m+m')\rho_{22}^{mm'}) + \\ &\quad + kn_{th}(2\sqrt{m}\sqrt{m'}\rho_{22}^{m-1,m'-1} - (m+m'+2)\rho_{22}^{m,m'}) - \\ &\quad - \gamma(N_{th} + 1)\rho_{22}^{m,m'} + \gamma N_{th}\rho_{11}^{m,m'} - \\ &\quad - ig(\sqrt{m+1}\rho_{12}^{m+1,m'} - \sqrt{m'+1}\rho_{21}^{m,m'+1}), \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_{12}^{m,m'} &= E(\sqrt{m}\rho_{12}^{m-1,m'} - \sqrt{m+1}\rho_{12}^{m+1,m'} - \\ &\quad - \sqrt{m'+1}\rho_{12}^{m,m'+1} + \sqrt{m'}\rho_{12}^{m,m'-1}) + \\ &\quad + k(n_{th} + 1)(2\sqrt{m+1}\sqrt{m'+1}\rho_{12}^{m+1,m'+1} - (m+m')\rho_{12}^{mm'}) + \\ &\quad + kn_{th}(2\sqrt{m}\sqrt{m'}\rho_{12}^{m-1,m'-1} - (m+m'+2)\rho_{12}^{m,m'}) - \\ &\quad - \gamma(N_{th} + 1/2)\rho_{12}^{m,m'} - ig(\sqrt{m}\rho_{22}^{m-1,m'} - \sqrt{m'+1}\rho_{11}^{m,m'+1}), \\ \dot{\rho}_{21}^{m,m'} &= E(\sqrt{m}\rho_{21}^{m-1,m'} - \sqrt{m+1}\rho_{21}^{m+1,m'} - \\ &\quad - \sqrt{m'+1}\rho_{21}^{m,m'+1} + \sqrt{m'}\rho_{21}^{m,m'-1}) + \\ &\quad + k(n_{th} + 1)(2\sqrt{m+1}\sqrt{m'+1}\rho_{21}^{m+1,m'+1} - (m+m')\rho_{21}^{mm'}) + \\ &\quad + kn_{th}(2\sqrt{m}\sqrt{m'}\rho_{21}^{m-1,m'-1} - (m+m'+2)\rho_{21}^{m,m'}) - \\ &\quad - \gamma(N_{th} + 1/2)\rho_{21}^{m,m'} - ig(\sqrt{m+1}\rho_{11}^{m+1,m'} - \sqrt{m'}\rho_{22}^{m,m'-1}). \end{aligned}$$

Нестационарная система уравнений (9) решалась методом, описанным в работе [5]. Число уравнений в системе (9) определялось максимальным числом фотонов M и равнялось $4(M+1)(M+1)$. В качестве стационарного решения использовалось решение системы (9) для времен, которые значительно превосходят характерные времена затухания в системе: k^{-1} – время затухания резонаторной моды поля, γ^{-1} – время спонтанного распада атома, $(gE/k)^{-1}$ – время осцилляций Раби в системе.

Начальное состояние для задачи (9) может выбираться произвольно. В частности, нами использовалось простейшее начальное состояние, соответствующее вакуумному состоянию поля и основному атомному состоянию: $\rho(t=0) = |0\rangle\langle 0| |1\rangle\langle 1|$.

Анализ свойств внутрирезонаторного поля проводится на основе Q -функции квазираспределения, которая определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} Q(\alpha, \alpha^*) &= \frac{1}{\pi} \langle \alpha | S \rho_a(\rho) | \alpha \rangle = \\ &= \frac{1}{\pi} e^{-|\alpha|^2} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{m'=0}^{\infty} \frac{\alpha^m \alpha^{*m'}}{\sqrt{m!} \sqrt{m'!}} (\rho_{11}^{mm'} + \rho_{22}^{mm'}), \end{aligned} \quad (10)$$

где α – комплексная амплитуда внутрирезонаторного поля.

Из всех функций квазираспределения квантовые свойства излучения наиболее ярко проявляются у P -функции распределения Глаубера-Сударшана в отличие от функции Вигнера или Q -функции, поскольку только P -функция определяется как двумерное Фурье-преобразование характеристической функции, а остальные функции содержат в Фурье-преобразовании дополни-

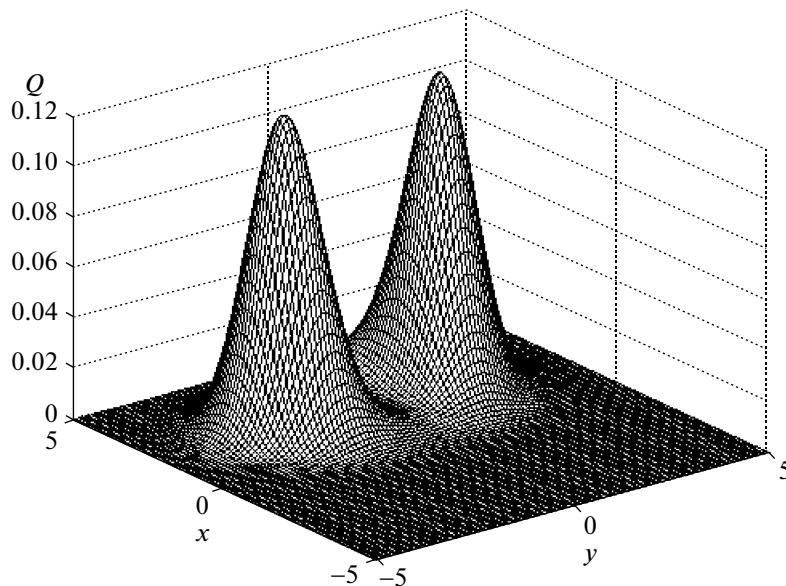


Рис. 1. Q -функция квазираспределения внутрирезонаторного поля для параметров системы $E = 2$, $g = 3$, $k = 0.5$, $\gamma = 0.1$, $n_{th} = 0$, $N_{th} = 0$. Все параметры нормированы на константу 10^7 Гц.

тельный затухающий множитель, который сглаживает квантовые особенности поведения квантовых систем. Так, определения порогов лазерной генерации для одноатомного лазера на основе Q - и P -функций существенно отличаются друг от друга [10].

Однако, как отмечалось в работе [9], для исследования фазовой оптической бистабильности Q - и P -функции являются равнозначными. Это связано с тем, что фазовая оптическая бистабильность имеет место при больших частотах Раби в системе. В свою очередь, как будет показано ниже, большие частоты Раби и возбуждения теплового резервуара приводят к тому, что интенсивность некогерентной накачки и скорость спонтанного испускания в нерезонаторные моды поля становятся одинаковыми, причем обе скорости пропорциональны числу тепловых возбуждений резервуара.

На рис. 1 представлена Q -функция распределения для случая фазовой бистабильности в системе в зависимости от действительной и мнимой частей амплитуды поля $\alpha = x + iy$, рассчитанная на основе формул (9), (10). Положение двух симметричных бистабильных пиков приблизительно соответствует значениям E/k для действительной части амплитуды поля и $g/2k$ для мнимой части [8]. Скорости затухания резонаторной моды поля и спонтанного распада атома выбраны таким образом, чтобы выполнялось основное условие появления фазовой бистабильности в системе:

$$\gamma/4k < 1. \quad (11)$$

Влияние тепловых возбуждений резервуара на фундаментальную модель квантовой оптики представлено на рис. 2. Из рисунка видно, что резкость бистабильных пиков уменьшается неравномерно. Наибольшее размытие соответствует части пиков с большим значением действительной части внутрирезонаторной амплитуды поля, а наименьшее размытие — части пиков с меньшим значением амплитуды поля.

Дальнейшее увеличение числа возбуждений атомного резервуара приводит к исчезновению фазовой оптической бистабильности. На рис. 3 Q -функция распределения имеет один максимум, соответствующий нулевому значению мнимой части амплитуды поля и приближенному значению E/k действительной части амплитуды поля.

Модификация формулы (11) с учетом тепловых возбуждений резервуара может быть получена на основе аналитического решения управляющего уравнения (1) в случае больших частот Раби

$$\Omega \gg g, k, \gamma, n_{th}, N_{th}. \quad (12)$$

После усреднения по быстрым осцилляциям Раби уравнение для матрицы плотности в “одетом” атомном базисе имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho'}{\partial t} = & -ig[(a^+ + a)\sigma'_z, \rho'] + \frac{\gamma}{2}(2N_{th} + 1)L(\sigma'_z, \sigma'_z)\rho' + \\ & + \frac{\gamma}{8}(2N_{th} + 1)L(\sigma'_+, \sigma'_-)\rho' + \frac{\gamma}{8}(2N_{th} + 1)L(\sigma'_-, \sigma'_+)\rho' + \\ & + n_{th}kL(a^+, a)\rho' + (1 + n_{th})kL(a, a^+)\rho'. \end{aligned} \quad (13)$$

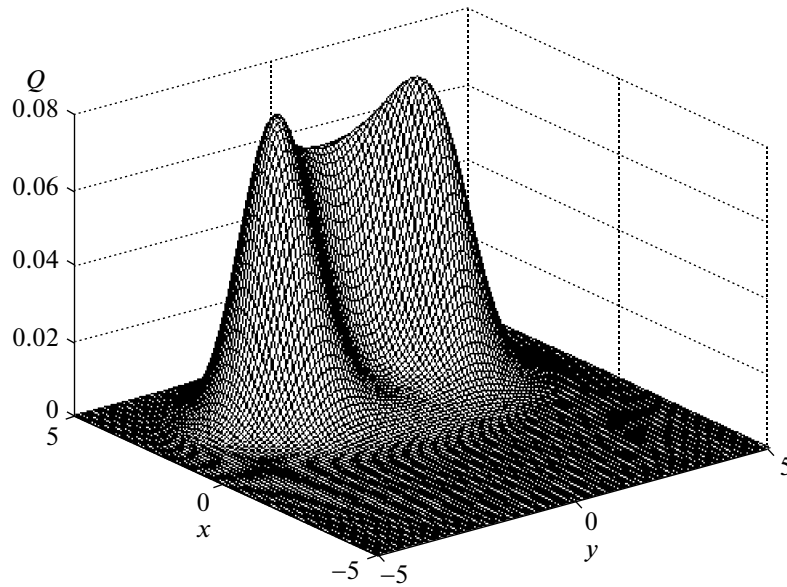


Рис. 2. Q -функция квазираспределения для тех же параметров, что и на рис. 1 и $N_{th} = 5$.

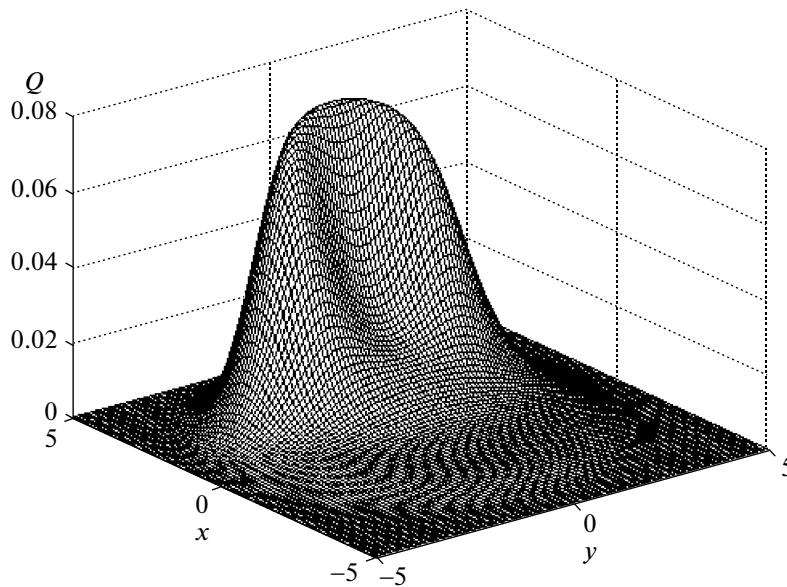


Рис. 3. Q -функция квазираспределения для тех же параметров, что и на рис. 1 и $N_{th} = 10$.

Из уравнения (13) следует, что учет среднего числа возбуждений атомного резервуара N_{th} увеличивает как интенсивность некогерентной накачки, так и интенсивность распада в $2N_{th} + 1$ раз по сравнению со случаем нулевой температуры. В результате быстрых движений вероятности обнаружить атом в основном и возбужденном состояниях оказываются одинаковыми. Другая картина наблюдается при учете тепловых фотонов в рассматриваемой системе. Из уравнения (13) следует, что вероятность затухания резонаторной моды

поля всегда превосходит вероятность ее возбуждения тепловыми фотонами резервуара.

Так же как и для фундаментальной модели квантовой оптики при температуре $T = 0$ [8], для модели (13) уравнения для диагональных и недиагональных элементов оказываются расцепленными, и уравнения для диагональных элементов матрицы плотности могут быть трансформированы в систему эквивалентных уравнений для P -функции Глаубера–Сударшана:

$$\frac{\partial P_{11}}{\partial t} = \frac{n_{th}}{2} \frac{\partial^2 P_{11}}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x} [(kx - E)P_{11}] + \frac{n_{th}}{2} \frac{\partial^2 P_{11}}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial y} [(ky + g/2)P_{11}] - \frac{\gamma(2N_{th} + 1)}{4} P_{11} + \frac{\gamma(2N_{th} + 1)}{4} P_{22}, \quad (14)$$

$$\frac{\partial P_{22}}{\partial t} = \frac{n_{th}}{2} \frac{\partial^2 P_{22}}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x} [(kx - E)P_{22}] + \frac{n_{th}}{2} \frac{\partial^2 P_{22}}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial y} [(ky - g/2)P_{22}] - \frac{\gamma(2N_{th} + 1)}{4} P_{22} + \frac{\gamma(2N_{th} + 1)}{4} P_{11}, \quad (15)$$

где P_{11} – плотность вероятности обнаружить атом в основном состоянии и поле в когерентном состоянии с амплитудой $|\alpha\rangle$, а P_{22} – плотность вероятности обнаружить атом в возбужденном состоянии и поле в когерентном состоянии с амплитудой $|\alpha\rangle$.

Уравнения (14) имеют наглядную интерпретацию в фазовом пространстве. Фазовое пространство модели представляет собой две фазовые плоскости, где нижняя плоскость соответствует основному атомному состоянию, а верхняя плоскость – возбужденному атомному состоянию. Движение системы по плоскости означает изменение амплитуды внутрирезонаторного поля, а переходы между плоскостями означают переходы между атомными состояниями. Движение по плоскостям осуществляется вдоль прямолинейных траекторий к полюсам притяжения с координатами полюсов $x_{01} = E/k$, $y_{01} = -g/2k$ для нижней плоскости и $x_{01} = E/k$, $y_{01} = g/2k$ для верхней плоскости, также возможны случайные скачки с одной плоскости на другую. Если предположить, что скорость атомных переходов значительно превосходит все остальные параметры системы, то система (14) есть реализация дискретного Марковского процесса между двумя состояниями $|1\rangle$ и $|2\rangle$ со временем между случайными скачками

$$\tau_{11 \Leftrightarrow 22} = -\frac{2k}{\gamma(2N_{th} + 1)} \ln \eta, \quad (16)$$

где η – случайная величина из интервала $[0, 1]$. Согласно (15), среднее число возбуждений атомного резервуара увеличивает частоту скачков между фазовыми плоскостями. С другой стороны, если нормированная скорость переходов меньше других параметров системы, то система (14) представляет собой уравнения Фоккера-Планка для внутрирезонаторной амплитуды поля и атома в основном (возбужденном) состоянии. Распределение действительной части поля одинаково для обеих плоскостей. Коэффициент смещения действительной и мнимой частей амплитуды поля равен скорости затухания моды поля в резонаторе, а коэффициент диффузии определяется тепловым числом фотонов.

Стационарное аналитическое решение системы (14) имеет вид

$$P_{ss} = P_0^{-1} \exp\left(-\frac{(x - x_0)^2}{n_{th} - 1/2}\right) \times \int_{-1}^1 dz (1 - z^2)^{d/k-1} \exp\left(-\frac{(y + y_0 z)^2}{n_{th} - 1/2}\right), \quad (17)$$

где $P_0^{-1} = \frac{1}{\pi n_{th}} 2^{2d/k-1} B(d/k, d/k)$ – нормировочный

множитель, $d = \frac{\gamma}{4}(2N_{th} + 1)$.

Из формулы (16) следует, что фазовая оптическая бистабильность имеет место при выполнении соотношения

$$\frac{\gamma(2N_{th} + 1)}{4k} < 1. \quad (18)$$

В фазовом пространстве модели фазовая оптическая бистабильность означает, что скорость скачков с одной фазовой плоскости на другую меньше скорости движения вдоль траекторий и большую часть времени система проводит на одной из фазовых плоскостей, изредка совершая случайные переходы в другое состояние.

Из формулы (17) следует, что тепловые возбуждения резервуара разрушают фазовую бистабильность. Для наблюдения фазовой бистабильности при ненулевой температуре по сравнению со случаем нулевой температуры резервуара требуется увеличение добротности резонатора в $2N_{th} + 1$ раза. При этом число тепловых фотонов не оказывает влияния на возникновение фазовой бистабильности. С ростом числа тепловых фотонов растет только ширина бистабильных пиков функции распределения [9].

Условие появления фазовой бистабильности (17) хорошо согласуется с численными расчетами Q -функции распределения на основе системы (9). Для распределений на рис. 1, 2 условие (17) выполняется, и фазовая бистабильность имеет место. Параметры рис. 3 не удовлетворяют соотношению (17), бистабильность в системе исчезает, и функция распределения имеет один выраженный максимум.

В данной работе рассмотрено влияние тепловых возбуждений резервуара на фундаментальную модель квантовой оптики. На основе численно рассчитанной Q -функции распределения и аналитически полученной P -функции распределения уточнено условие возникновения фазовой бистабильности в системе. Промоделировано, что тепловые возбуждения резервуара увеличивают скорость переходов между атомными состояниями и, следовательно, разрушают фазовую оптическую бистабильность.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Walther H.* // J. Opt. B. 2002. V. 4. P. S418.
2. *Rempe G., Walther H., Klein N.* // Phys.Rev. A. 1987. V.58. P.353.
3. *Rempe G., Walther H.* // Phys.Rev. A. 1990. V.42. P.1650.
4. *Varcoe B.T.H., Brattke S., Englert B.-G., Walther H.* // Laser Physics. 2000. V. 10. № 1. P. 1.
5. *Козловский А.В., Ораевский А.Н.* // ЖЭТФ. 1999. Т. 115. С. 2001.
6. *Englert B.-G., Loffler M., Benson O., Varcoe B., Weidinger M., Walther H.* // Fortschr. Phys. 1998. V. 46. P. 897.
7. *Huver S.D., Wildfeuer C.F., Dowling J.P.* // Phys.Rev. A. 2008. V.78. P. 063828.
8. *Kilin S.Ya., Krinitskaya T.B.* // JOSA. B. 1991. V. 8. P. 2289.
9. *Карлович Т.Б., Килин С.Я.* // Опт. и спектр. 2003. Т. 94. № 6. С. 867.
10. *Карлович Т.Б., Килин С.Я.* // Опт. и спектр. 2001. Т. 91. № 3. С. 375.